



**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN**

Institut für Massivbau <http://massivbau.tu-dresden.de>

SILKE SCHEERER, MANFRED CURBACH (HRSG.)

LEICHT BAUEN MIT BETON

**FORSCHUNG IM
SCHWERPUNKTPROGRAMM 1542
FÖRDERPHASE 1**

Entwerfen, Berechnen und Optimieren von Betonschalen mit der isogeometrischen B-Rep-Analyse

Michael Breitenberger
Kai-Uwe Bletzinger

Lehrstuhl für Statik,
Technische
Universität München

Es wird ein neues Konzept vorgestellt, welches den Entwurf, die Berechnung und die Optimierung von Schalen aus Betonfertigbauteilen vereinfachen soll. Für das Konzept wird die neu entwickelte isogeometrische B-Rep-Analyse (IBRA) verwendet, welche für die Geometriebeschreibung ausschließlich Computer-Aided-Design-Parameter (CAD-Parameter) verwendet. Somit kann der gesamte Entwicklungsprozess der Schale, vom Entwurf bis zur Optimierung, in einem CAD-Programm durchgeführt werden.

1 Einleitung

Das Forschungsschwerpunktprogramm 1542 der DFG mit dem Titel *Leicht Bauen mit Beton* beschäftigt sich mit dem Schaffen von Grundlagen für eine neue Art zu entwerfen, zu konstruieren und zu bauen. Im Rahmen dieses Schwerpunktprogrammes wird am Lehrstuhl für Statik an der Technischen Universität München an einem neuen Entwurfs- und Berechnungskonzept für gekrümmte Betonfertigbauteile aus Stahlfaserbeton gearbeitet. Das neue Konzept soll die Entwicklung von effizienten und wirtschaftlichen Lösungen für Schalentragswerke aus Betonfertigbauteilen vereinfachen [1]. Deshalb wurde für den Entwurfs- und Berechnungsprozess die isogeometrische B-Rep-Analyse (IBRA) [2] entwickelt, welche im Prozess durchgehend angewandt wird.

IBRA ist eine Finite-Elemente-Methode, welche für die Approximation der Lösung die gleichen Basisfunktionen, Randbeschreibungen und die gleiche Topologie des Computer-Aided-Design-Modells verwendet. Damit ist IBRA eine Weiterentwicklung bzw. Generalisierung der isogeometrischen Analyse (IGA) [3].

Für die Geometriebeschreibung in IBRA werden NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) verwendet, da diese in den meisten CAD-Programmen für die Darstellung von Freiformgeometrien verwendet werden. NURBS erlauben eine einheitliche Beschreibung von analytischen und freien Formen, sind sehr effizient und ermöglichen intuitives Modellieren [4]. Deshalb sind NURBS hervorragend für die Geometriebeschreibung im vorgestellten Entwurfs- und Berechnungsprozess geeignet.

Der Prozess kann in vier Schritte unterteilt werden:

- ☐ Formfindung der Schalengeometrie,
- ☐ Berechnung der Schale (Verformung und Schnittgrößen),
- ☐ Bestimmung der Mindestdickenverteilung,
- ☐ Optimierung des Fugenmusters.

Im ersten Schritt wird mit Hilfe von IBRA eine Formfindung durchgeführt, um die Form der Schalenumskonstruktio zu bestimmen. Im zweiten Schritt werden die Schnittgrößen in der Schale bestimmt, aus denen im dritten Schritt die erforderliche Mindestdickenverteilung der Schale abgeleitet wird. Im vierten Schritt wird schließlich das optimale Fugenmuster für die Betonschale bestimmt. Für die Durchführung dieser Schritte wird das am Lehrstuhl entwickelte Finite-Elemente-Programm Carat++ verwendet, wobei das NURBS-basierte 3D-Flächenmodellierungsprogramm Rhinoceros 5 als Pre- und Postprocessingtool verwendet wird [5].

Das Ziel des vorgestellten Prozesses ist zum einen, filigrane Schalenträgerwerke nach dem Prinzip *form follows force* zu entwerfen, und zum anderen, die optimale Geometrie und Anordnung der Betonfertigbauteile zu bestimmen. Im Folgenden werden die einzelnen Schritte des Prozesses an einem einfachen Beispiel gezeigt.

2 Formfindung

2.1 Formfindung von Schalen

Die Geometrie einer Schale wird üblicherweise durch eine Mittelfläche und eine dazugehörige Dickenverteilung definiert. Für den entwickelten Prozess kann die Mittelfläche grundsätzlich frei gewählt werden. Sie kann von geometrischen Grundformen wie Zylinder, Kugel usw. bis Freiformflächen jede Form annehmen. Da die meisten über geometrische Grundformen definierten Schalengeometrien nicht zu einer optimalen Materialbeanspruchung führen, werden für die Bestimmung der Mittelfläche häufig Formfindungstechniken eingesetzt, welche meistens das Ziel verfolgen, die Lastabtragung in der Struktur zu optimieren [6], [7], [8].

2.2 Formfindung mit der isogeometrischen B-Rep-Analyse

Schalen können ihre Lasten entweder über Membran- oder Biegewirkung abtragen. Da die Biegung eine nicht optimale Ausnutzung des Materials zur Folge hat, wird eine reine Membranbeanspruchung angestrebt. Wie eine Schale ihre Lasten abträgt, hängt hauptsächlich von der Geometrie (Mittelfläche) und den Lagerungsbedingungen ab [7].

Aufgrund der hohen Druck- und geringen Zugfestigkeit von Beton sollten Betonschalen möglichst nur auf Druck belastet werden. Für die Bestimmung druckoptimierter Formen stehen viele unterschiedliche Techniken zur Verfügung. An dieser Stelle wird die neu entwickelte IBRA-Technik für die Bestimmung eines Hängemodells verwendet. Ausgangspunkt für das Beispiel mit dieser Technik ist eine vorgespannte, ebene Membran. Die Membran ist in Bild 1 dargestellt. Sie wird durch eine quadratische Fläche mit den Abmessungen 20 × 20 m definiert, wobei die Ecken abgeschnitten sind. Letztere dienen als feste Lagerung der Membran. Für die IBRA-Formfindung soll sich die vorgespannte Membran unter Eigengewicht verformen.

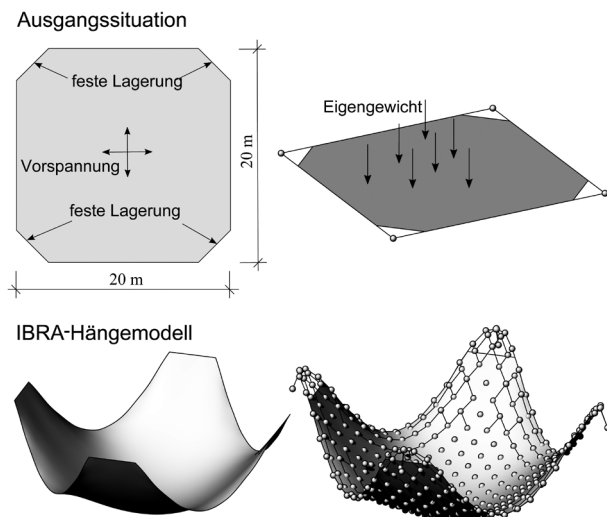


Bild 1: CAD-Hängemodell aus IBRA-Formfindung: Problembeschreibung und Lösung mit und ohne Kontrollpunkte [1]

Das Verfahren besteht darin, die Verformung der Membran unter Eigengewicht mit einer geometrisch nichtlinearen isogeometrischen B-Rep-Analyse zu bestimmen. Dafür wird die Membran mit einer getrimmten NURBS-Fläche beschrieben und verfeinert, um genügend Formfreiheit für die Darstellung der verformten Membran zu haben. Verfeinern bedeutet, der Geometrie mehr Kontrollpunkte für ihre Darstellung bereitzustellen [3]. Bei der NURBS-Verfeinerung handelt es sich um eine Standardfunktionalität in CAD und kann daher sehr schnell und effizient ausgeführt werden. Die Kontrollpunkte der verformten Geometrie sind in Bild 1 mit Kugeln dargestellt. Mit dem Grad der Verfeinerung kann die Formgebung beeinflusst werden, wobei stärker verfeinerte Flächen zu besseren Approximationen der exakten Lösung führen. Für die

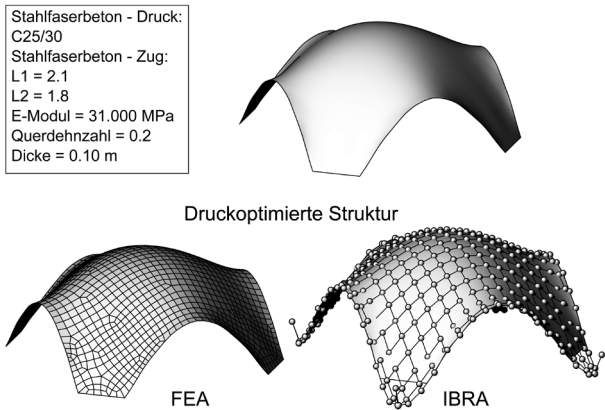


Bild 2: Problembeschreibung und unterschiedliche Diskretisierung der Schale für die Berechnung mit der klassischen FEA und der IBRA

Berechnung selbst wird das NURBS-basierte Membranelement aus [9] verwendet.

Um die druckoptimierte Schale aus dem Hängemodell (Bild 1) zu erhalten, wird die verformte Membran lediglich „auf den Kopf gestellt“ (Bild 2).

3 Berechnung

Für die Berechnung der Schalenverformung und Schnittgrößen, für unterschiedliche Lastfälle, wird erneut die IBRA-Technik verwendet. Für IBRA kann die formgefundene Geometrie aus Bild 1 direkt für die Berechnung verwendet werden. Eventuell kann die Geometrie noch weiter verfeinert werden (Bild 3), um die Verformungen besser approximieren zu können.

Die Problembeschreibung für die Berechnung des Beispiels ist in Bild 2 gezeigt. Für das Beispiel wird ein Stahlfaserbeton der Klasse C25/30 mit den Stahlfaserleistungsklassen L1 = 2.1 und L2 = 1.8 verwendet. Für den E-Modul werden 31.000 MPa und für die Querdehnzahl $\nu = 0,2$ angesetzt. Für die Berechnung selbst wird zunächst eine konstante Dicke von $t = 0,10$ m angenommen. Diese wird später in der Bemessung entsprechend den Anforderungen angepasst. In Bild 2 ist zudem der Unterschied der Diskretisierung für IBRA und der klassischen Finite-Element-Analyse (FEA) gezeigt. Mit IBRA wird die Lösung mit der verfeinerten CAD-Geometrie approximiert, während für die klassische FEA die CAD-Geometrie zunächst in ein FE-Netz aus linearen bzw. quadratischen Polynomen überführt werden muss (Vernetzung), um dann mit diesem Netz die Lösung zu approximieren.

Für die Berechnung mit IBRA wird das NURBS-basierte KIRCHHOFF-LOVE-Schalenelement unter Verwendung eines linear-elastischen Materialgesetzes benutzt. Diese Elementformulierung wurde am Lehrstuhl für Statik von J. KIENDL entwickelt [10]. Das NURBS-basierte KIRCHHOFF-LOVE-Schalenelement eignet sich hervorragend für die Berechnung von dünnen Schalen.

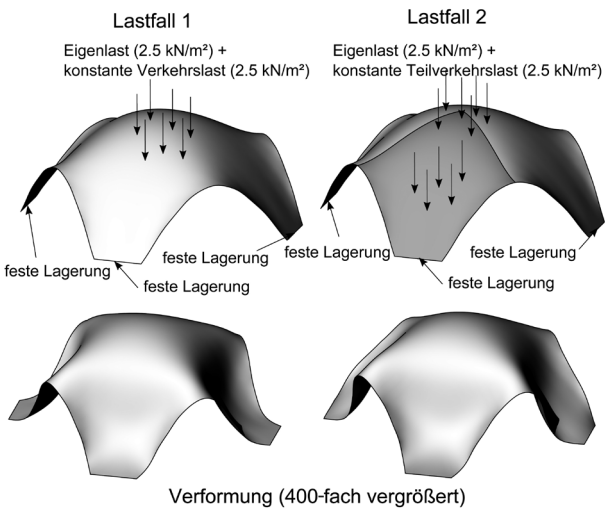


Bild 3: Konvergenzdiagramme der Verschiebung des Schalenmittelpunktes für unterschiedliche Verfeinerungen (Polynomgrade $p = q = 3$) [1]

Eine kleine Konvergenzstudie für unterschiedliche Verfeinerungen mit diesem Elementtyp ist in Bild 3 gezeigt. Die Diagramme zeigen die Verschiebung am Mittelpunkt für unterschiedliche Verfeinerungen unter einer konstanten Last. Dabei konvergiert die Lösung sehr schnell, d. h. für eine gute Näherung der Lösung werden nur sehr wenige Freiheitsgrade benötigt.

Für den weiteren Prozess wird die Schale (Bild 2) aus Gründen der Übersichtlichkeit nur für zwei Lastfälle berechnet. Diese Lastfälle sind in Bild 4 dargestellt. Der Lastfall LF 1 besteht aus einer konstanten Eigenlast von 2,5 kN/m² und einer konstanten Verkehrslast von ebenfalls

2,5 kN/m² verteilt über die gesamte Struktur. Der Lastfall LF 2 setzt sich zusammen aus einer konstanten Eigenlast von 2,5 kN/m² und einer Verkehrslast von 2,5 kN/m², diesmal verteilt über ein Viertel der Struktur. Die entsprechenden Verformungen sind ebenfalls in Bild 4 mit 400-facher Vergrößerung dargestellt.

4 Bemessung

Nach der Berechnung der Schale, für die bisher eine konstante Dicke angenommen wurde, folgt nun die Bestimmung der optimierten Dickenverteilung (Bemessung) der Schale. Abhängig von den verwendeten Materialien können an dieser Stelle unterschiedliche Bemessungsverfahren verwendet werden. Beispielsweise kann die Bemessung von Stahlfaserbeton nach [11] verwendet werden.

Für die Bemessung werden zunächst an einer bestimmten Anzahl an Punkten die Schnittgrößen in der Schale für die unterschiedlichen Lastfälle bestimmt. Die Anzahl der Punkte richtet sich dabei nach der Komplexität der Geometrie. Für dieses Beispiel sind diese Punkte (hier: 361 Punkte) in Bild 5 dargestellt.

Nun wird an jedem dieser Punkte eine erforderliche Minstdicke aus den entsprechenden Schnittgrößen bestimmt, wobei die Bemessung selbst nach [11] erfolgt. Die benötigten Minstdicken für die dünnwandige Struktur wurden für einen Beton der Klasse C25/30 mit Stahlfaserbewehrung berechnet. Die Bestimmung der Minstdicke erfolgt für jeden Lastfall separat, d. h. jedem Lastfall wird eine Dickenverteilung zugewiesen. In Bild 6 ist die erforderliche Minstdickenverteilung für den Schnitt A-A für die zwei Lastfälle LF 1 und LF 2 gezeigt. Die Gesamtdickenverteilung ergibt sich schlussendlich aus den erforderlichen Dickenverteilungen der einzelnen Lastfälle. Diese ist für das Beispiel ebenfalls in Bild 6 dargestellt.

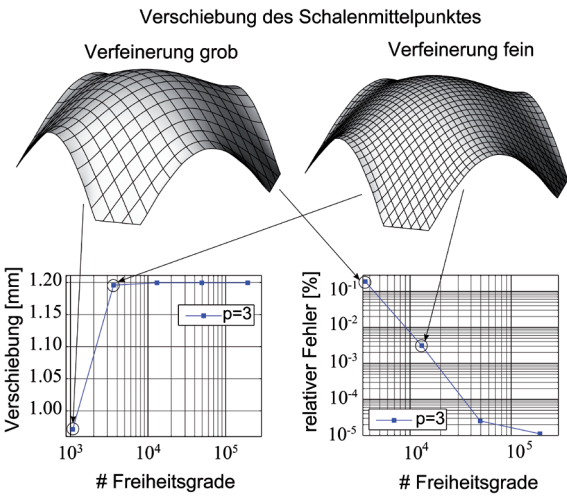


Bild 4: Verformungen der Schale aus Bild 2 für zwei Lastfälle [1]

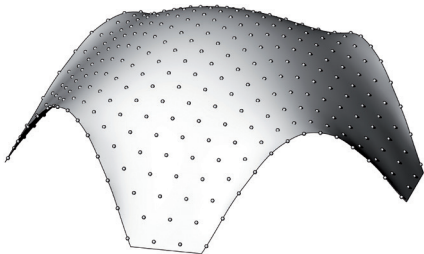


Bild 5: Bemessungspunkte auf der Mittelfläche der Schale [1]

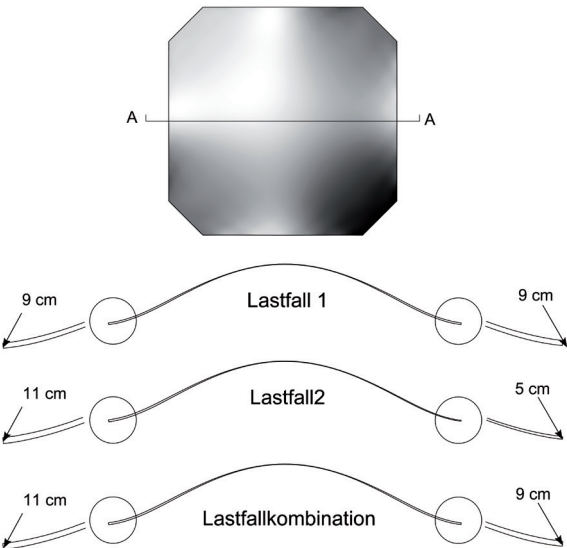


Bild 6: Minstdickenverteilung im Schnitt A-A für die Lastfälle LF 1 und LF 2 und deren Kombination [1]

5 Optimierung des Fugenmusters

Damit die Schale aus Betonfertigbauteilen hergestellt werden kann, muss diese in Segmente zerlegt werden. Damit die Fugen zwischen den Betonfertigbauteilen entsprechend schlank ausgeführt werden können, müssen die Schnittgrößen in den Fugen möglichst klein sein. Dafür wurde am Lehrstuhl für Statik eine IBRA-Fugenoptimierung

entwickelt, welche es erlaubt, die Schnittgrößen in den Fugen zu minimieren [12].

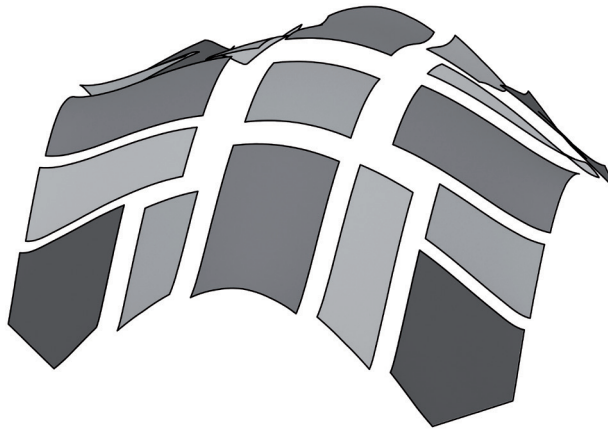


Bild 7: Grobe Zerlegung der Mittelfläche in eine bestimmte Anzahl von Segmenten

Die Methode besteht im Wesentlichen aus zwei Schritten: Im ersten Schritt wird die Mittelfläche grob in die gewünschte Anzahl der Segmente zerlegt (Bild 7), wobei die einzelnen Segmente durch getrimmte NURBS-Flächen beschrieben werden. Dieser Schritt kann in einem CAD-Programm durchgeführt werden.

Nachdem die Schale segmentiert wurde, können die Schnittgrößen in den Fugen bestimmt (siehe Abschnitt 3) und nach [12] optimiert werden. Dabei werden die inneren Randbeschreibungen der getrimmten Flächen so angepasst, dass die Schnittgrößen in den Rändern minimiert werden.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde ein Konzept vorgestellt, wie Schalen aus Betonfertigbauteilen mit IBRA entworfen, berechnet und optimiert werden können, wobei ausschließlich CAD-Parameter verwendet werden. Die entwickelten Techniken sollen beispielsweise helfen, große Freiformstrukturen aus Betonfertigbauteilen wirtschaftlich zu entwerfen und zu bauen.

Danksagung

Die Autoren danken der DFG für die Förderung des Forschungsprojektes *Effiziente Schalenträgerwerke aus funktional gradierten Betonfertigteilen* innerhalb des Schwerpunktprogramms SPP 1542.

Literatur

- [1] BREITENBERGER, M.; WÜCHNER, R.; BLETZINGER, K.-U.: Entwurf und Berechnung von gekrümmten Betonfertigbauteilen mit CAD-basierten Verfahren. *Beton- und Stahlbetonbau* 108 (2013), Heft 11, S. 783–791.
- [2] BREITENBERGER, M.; WÜCHNER, R.; BLETZINGER, K.-U.: Analysis in Computer Aided Design: Nonlinear Isogeometric B-Rep Analysis of Shell Structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (Beitrag zur Veröffentlichung eingereicht).
- [3] HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y.: Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), Heft 39–41, S. 4135–4195.
- [4] PIEGL, L. A.; TILLER, W.: *The NURBS Book*. Berlin, New York: Springer, 1997.
- [5] BREITENBERGER, M.: *Integration of Free-Form Shell Analysis and Design Using the Isogeometric Concept*. Master Thesis, Technische Universität München, 2012.

- [6] BLETZINGER, K.-U.: Form Finding and Morphogenesis. In: MUNGHAN, I.; ABEL, J. F. (Hrsg.): Fifty Years of Progress for Shell and Spatial Structures: In Celebration of the 50th Anniversary Jubilee of the IASS (1959–2009). Madrid: International Association for Shell and Spatial Structures, 2011.
- [7] BLETZINGER, K.-U.; RAMM, E.: Structural Optimization and Form Finding of Light Weight Structures. Computers & Structures 79 (2001), Heft 22–25, S. 2053–2062.
- [8] BLETZINGER, K.-U.; WÜCHNER, R.; DAQUD, F.; CAMPRUBI, N.: Computational Methods for Form Finding and Optimization of Shells and Membranes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 194 (2005), Heft 30–33, S. 3438–3452.
- [9] D'AURIA, I.: Form Finding with Isogeometric Elements. Master Thesis, Technische Universität München, 2013.
- [10] KIENDL, J.; BLETZINGER, K.-U.; LINHARD, J.; WÜCHNER, R.: Isogeometric Shell Analysis with Kirchhoff-Love Elements. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 198 (2009), Heft 49–52, S. 3902–3914.
- [11] GÖDDE, L.; STRACK, M.; MARK, P.: Bauteile aus Stahlfaserbeton und stahlfaserverstärktem Stahlbeton – Hilfsmittel für Bemessung und Verformungsabschätzung nach DAfStB-Richtlinie „Stahlfaserbeton“. Beton- und Stahlbetonbau 105 (2010), Heft 2, S. 78–91.
- [12] BREITENBERGER, M.; WÜCHNER, R.; BLETZINGER, K.-U.: Isogeometric Layout Optimization of Shell Structures Using Trimmed NURBS Surfaces. In: Proceedings of World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization WCSMO-10, 19.–24.05.2013 in Orlando (USA).

**Effiziente Schalentragwerke
aus funktional gradierten Betonfertigteilen**

Projektleiter

Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger

Projektbearbeiter

Michael Breitenberger M.Sc. M.Sc. (hons)

Projektlaufzeit

03/2012 – 02/2015

Partner

Lehrstuhl für Werkstoffe und Werkstoffprüfung
im Bauwesen (Prof. Dr.-Ing. Gehlen), TU München
Max Bögl, Sengenthal

Web

www.st.bgu.tum.de